Semana 8

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 29 a 36 de la Guía 2. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Antes de comenzar con los ejercicios de la semana 8, vamos a repasar algunas definiciones y propiedades que vamos a usar a lo largo de esta semana.

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El operador *derivación* $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, está definido por

$$D[y] := \frac{dy}{dx}.$$

Dados $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, se define el *operador diferencial de orden n con coeficientes constantes* $L : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, como

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I,$$

donde $D^n = D \circ D \circ \cdots \circ D$ (componer n veces el operador D).

Llamaremos *polinomio carecterístico del operador L* al polinomio $p \in \mathbb{K}_n[x]$ que se obtiene de L intercambiando papeles entre D y x, es decir

$$p(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Recordar que en el **Ejercicio 2**, probamos que $L \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$.

Definición. *Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $D \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ y $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x$ un polinomio de $\mathbb{C}_n[x]$ se define $q(D) : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ como*

$$q(D) := a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I.$$

Es fácil ver que como $D \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ también tenemos que $q(D) \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Por otra parte, si $q_1 \in \mathbb{C}_n[x], q_2 \in \mathbb{C}_m[x]$ son dos polinomios, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $D \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, es fácil ver que

$$(\alpha q_1 + \beta q_2)(D) = \alpha q_1(D) + \beta q_2(D), \tag{1}$$

la prueba de esto es muy simple y se sugiere hacerla.

A partir de la definición anterior, observar que:

Si p es el polinomio característico del operador diferencial de orden n que llamamos L. Entonces

$$p(D) = L.$$

La siguiente propiedad la vamos a usar para resolver varios ejercicios de este semana.

Proposición 1. *Sea* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *y supongamos que*

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *son las* n *raíces de* p*. Entonces*

$$L = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_n I).$$

Dem. Vamos a usar el principio de inducción para demostrar esta propiedad. Supongamos que $k = 1$, entonces $p(x) = x + a_0 = (x - \lambda_1)$, donde $\lambda_1 := -a_0 \in \mathbb{C}$ es la única raíz de p, Entonces

$$L = p(D) = (D - \lambda_1 I).$$

Por lo tanto para $k = 1$ se cumple la propiedad.

Supongamos que para $k = n$ vale la propiedad (HI, hipótesis inductiva). Usando la HI vamos a probar que la propiedad también vale para $k = n + 1$. En este caso $p \in \mathbb{C}_{n+1}[x]$.

Sea $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ una raíz de p (existe por el Teorema Fundamental del Álgebra). Entonces, usando la división de polinomios (por ejemplo), tenemos que

$$p(x) = (x - \lambda_{n+1})q(x),$$

donde $q \in \mathbb{C}_n[x]$.

Para hacer la siguiente cuenta, supongamos que $q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. Entonces, $p(x) = (x - \lambda_{n+1})q(x) = xq(x) - \lambda_{n+1}q(x) = c_n x^{n+1} + c_{n-1}x^n + \cdots + c_1 x^2 + c_0 x - \lambda_{n+1}q(x)$. Entonces, usando la propiedad (1), tenemos que

$$L = p(D) = c_n D^{n+1} + c_{n-1}D^n + \cdots + c_1 D^2 + c_0 D - \lambda_{n+1}q(D) = (D - \lambda_{n+1}I)q(D).$$

Ahora, sean $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \cdots, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, las n raíces del polinomio q, entonces por HI, tenemos que

$$q(D) = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_n I).$$

Por otra parte,

$$p(x) = (x - \lambda_{n+1})q(x) = (x - \lambda_{n+1})[(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)].$$

Entonces,

$$L = p(D) = (D - \lambda_{n+1}I)q(D) = (D - \lambda_{n+1}I)(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_n I) =$$

$$= (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_n I)(D - \lambda_{n+1}I),$$

donde para la última igualdad usamos fuertemente que si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, los operadores $(D - \alpha I)$ y $(D - \beta I)$ conmutan, es decir $(D - \alpha I)(D - \beta I) = D^2 - \alpha D - \beta D + \alpha\beta I = (D - \beta I)(D - \alpha I)$.

Finalmente, como a partir de la validez de la proposición para n deducimos la validez para $n+1$, se sigue por inducción, que la propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Para resolver el **Ejericio 29** vamos a usar la siguiente propiedad (su demostración es muy simple y se sugiere hacerla): sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y D el operador derivación. Observar que, como $(D-\lambda I)^{k+1}$ es componer $k+1$ veces el operador $D-\lambda I$, se sigue que para todo $k \geq 1$,

$$(D-\lambda I)^{k+1} = (D-\lambda I) \circ (D-\lambda I)^k = (D-\lambda I)^k \circ (D-\lambda I). \tag{2}$$

Ahora sí, vamos a resolver el **Ejercicio 29** item por item.
Ejercicio 29 : Sea $D : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ el operador derivación.

a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$(D-\lambda I)^k[f(x)e^{\lambda x}] = f^k(x)e^{\lambda x},$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Vamos a probarlo por inducción. Primero, el caso $n=1$. En este caso, dada $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, por definición de D tenemos:

$$(D-\lambda I)[f(x)e^{\lambda x}] = D[f(x)e^{\lambda x}] - \lambda f(x)e^{\lambda x} = \frac{d(f(x)e^{\lambda x})}{dx} - \lambda f(x)e^{\lambda x} =$$

$$= f'(x)e^{\lambda x} + \lambda f(x)e^{\lambda x} - \lambda f(x)e^{\lambda x} = f'(x)e^{\lambda x},$$

por lo que la igualdad se cumple para $n=1$.

Supongamos que la igualdad vale para $n=k$ (HI), es decir,

$$(D-\lambda I)^k[f(x)e^{\lambda x}] = f^k(x)e^{\lambda x},$$

veamos que la igualdad vale para $n=k+1$. Entonces, dada $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, por definición de D, usando la propiedad (2) y usando la HI, tenemos que

$$(D-\lambda I)^{k+1}[f(x)e^{\lambda x}] = ((D-\lambda I)\circ(D-\lambda I)^k)\ [f(x)e^{\lambda x}] = (D-\lambda I)[(D-\lambda I)^k\ [f(x)e^{\lambda x}]] =$$

$$= (D-\lambda I)[f^k(x)e^{\lambda x}] = \frac{d(f^k(x)e^{\lambda x})}{dx} - \lambda f^k(x)e^{\lambda x} = f^{k+1}(x)e^{\lambda x} + \lambda f^k(x)e^{\lambda x} - \lambda f^k(x)e^{\lambda x} =$$

$$= f^{k+1}(x)e^{\lambda x}.$$

Como a partir de la validez de la igualdad para $n=k$, deducimos la validez para $n=k+1$, se sigue que por inducción, la igualdad vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

b) Comprobar que

$$Nu(D-\lambda I) = gen\{e^{\lambda x}\}.$$

Tenemos que probar una igualdad de conjuntos así que veremos la doble inclusión.

Sea $f \in Nu(D-\lambda I)$, entonces $(D-\lambda I)[f(x)] = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $D[f(x)]-\lambda f(x) = \frac{df}{dx} - \lambda f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir,

$$f' - \lambda f = 0.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, vamos a multiplicar ambos lados la última igualdad por $e^{-\lambda x}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x) = (e^{-\lambda x} f(x))'.$$

Integrando, nos queda, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-\lambda x} f(x) = \int (e^{-\lambda x} f(x))' = \int 0 = c,$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante. Por lo tanto, despejando, nos queda

$$f(x) = c(e^{-\lambda x})^{-1} = ce^{\lambda x}.$$

Entonces, $f \in gen\{e^{\lambda x}\}$ y tenemos que $Nu(D - \lambda I) \subseteq gen\{e^{\lambda x}\}$.

Recíprocamente, sea $f \in gen\{e^{\lambda x}\}$, entonces $f(x) = \alpha e^{\lambda x}$, para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(D - \lambda I)[f(x)] = f'(x) - \lambda f(x) = \alpha\lambda e^{\lambda x} - \alpha\lambda e^{\lambda x} = 0.$$

Entonces $f \in Nu(D-\lambda I)$ y se sigue que $gen\{e^{\lambda x}\} \subseteq Nu(D-\lambda I)$. Por lo tanto, como probamos la doble inclusión, tenemos que $Nu(D - \lambda I) = gen\{e^{\lambda x}\}$.

c) Para cada $k \in \mathbb{N}$ verificar que si

$$Nu((D - \lambda I)^k) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\},$$

entonces

$$Nu(((D - \lambda I)^{k+1})) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}.$$

Usando la propiedad (2), tenemos que

$$Nu((D - \lambda I)^{k+1}) = Nu((D - \lambda I)^k \circ (D - \lambda I)).$$

Con esto, vamos a demostrar la igualdad de conjuntos que nos pide el item c), para eso vamos a probar la doble inclusión.

Sea $f \in Nu(((D - \lambda I)^{k+1})) = Nu((D - \lambda I)^k \circ (D - \lambda I))$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = ((D - \lambda I)^k \circ (D - \lambda I))[f(x)] = (D - \lambda I)^k[(D - \lambda I)[f(x)]].$$

Entonces $(D-\lambda I)[f] \in Nu(D-\lambda I)^k$. Por hipótesis, $Nu((D-\lambda I)^k) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\}$. Entonces, existe $p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]$, tal que

$$(D - \lambda I)[f(x)] = f'(x) - \lambda f(x) = p(x)e^{\lambda x}.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, vamos a multiplicar ambos lados la última igualdad por $e^{-\lambda x}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x) = e^{-\lambda x} p(x)e^{\lambda x} = p(x)e^{-\lambda x}e^{\lambda x} = p(x).$$

Entonces

$$(e^{-\lambda x}f(x))' = e^{-\lambda x}f'(x) - \lambda e^{-\lambda x}f(x) = p(x).$$

Entonces, integrando la ecuación anterior a cada lado, obtenemos

$$e^{-\lambda x}f(x) = \int (e^{-\lambda x}f(x))' = \int p(x).$$

Sea $q(x) := \int p(x)$, entonces como $p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]$ (y estamos integrando p) tenemos que $q \in \mathbb{C}_k[x]$. Entonces, despejando f de la última igualdad, nos queda, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (e^{-\lambda x})^{-1}q(x) = e^{\lambda x}q(x).$$

Entonces $f \in \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}$ y tenemos la primera inclusión: $Nu(((D-\lambda I)^{k+1})) \subseteq \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}$.

Recíprocamente, sea $f \in \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}$, entonces $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, para cierto $p \in \mathbb{C}_k[x]$. Entonces,

$$(D-\lambda)[f(x)] = \frac{d(p(x)e^{\lambda x})}{dx} - \lambda f(x) = p'(x)e^{\lambda x} + p(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda p(x)e^{\lambda x} = p'(x)e^{\lambda x}.$$

Entonces, como $p \in \mathbb{C}_k[x]$ su derivada $p' \in \mathbb{C}_{k-1}[x]$, entonces

$$(D-\lambda)[f] \in \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\} = Nu((D-\lambda I)^k).$$

Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = (D-\lambda I)^k[(D-\lambda)[f(x)]] = ((D-\lambda I)^k \circ (D-\lambda I))[f(x)] = (D-\lambda I)^{k+1}[f(x)].$$

Por lo tanto, $f \in Nu((D-\lambda I)^{k+1})$ y se sigue que $\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\} \subseteq Nu((D-\lambda I)^{k+1})$. Entonces, como probamos la doble inclusión, tenemos que

$$Nu(((D-\lambda I)^{k+1})) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}.$$

d) **Notar que hay un error en la guía** Utilizar los incisos b) y c) junto al principio de inducción para demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x^i e^{\lambda x}\}$ con $i = \{0, 1, 2 \cdots, k-1\}$, es una base de $Nu((D-\lambda I)^k)$.

Vamos a demsostrar el inciso d) por inducción en k. Primero, el caso $k = 1$. En este caso, queremos ver, que el conjunto $\{e^{\lambda x}\}$ es una base de $Nu(D-\lambda I)$. En el ítem b), vimos que $Nu(D-\lambda I) = gen\{e^{\lambda x}\}$ y como $e^{\lambda x}$ no es la función nula, el conjunto $\{e^{\lambda x}\}$ es LI, por lo tanto $\{e^{\lambda x}\}$ es una base de $Nu(D-\lambda I)$.

Ahora, supongamos que $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$ es una base de $Nu((D-\lambda I)^k)$ (HI).

Veamos que esto también vale para $k+1$, es decir, veamos que $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^k e^{\lambda x}\}$ es una base de $Nu((D-\lambda I)^{k+1})$.

Ya vimos en el **Ejercicio 1.15** que el conjunto $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^k e^{\lambda x}\}$ es LI. Sólo nos resta probar que

$$gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^k e^{\lambda x}\} = Nu((D-\lambda I)^{k+1}),$$

sabiendo que por (HI) vale

$$gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}\} = Nu((D-\lambda I)^{k}).$$

Pero eso, es exactamente lo que hicimos en el item c). Si no se convencen, notar que

$$gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^k e^{\lambda x}\} = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}.$$

De hecho, si $f \in gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^k e^{\lambda x}\}$, entonces existen $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(x) = \alpha_0 e^{\lambda x} + \alpha_1 x e^{\lambda x} + \cdots + \alpha_k x^k e^{\lambda x} = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k)e^{\lambda x}.$$

Si llamamos $p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$ entonces $p \in \mathbb{C}_k[x]$ y $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, por lo tanto $f \in \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}$ y tenemos que $gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^k e^{\lambda x}\} \subseteq \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}$.

Recíprocamente, si $f \in \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}$, entonces $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, para cierto $p \in \mathbb{C}_k[x]$. Como $p \in \mathbb{C}_k[x]$, existen $a_0, a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + \alpha_k x^k.$$

Por lo tanto, $f(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + \alpha_k x^k)e^{\lambda x} = a_0 e^{\lambda x} + a_1 x e^{\lambda x} + \cdots + a_k x^k e^{\lambda x}$, entonces $f \in gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^k e^{\lambda x}\}$ y tenemos la otra inclusión.

Conclusión, con la HI y el item c) probamos que $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^k e^{\lambda x}\}$ es una base de $Nu((D-\lambda I)^{k+1})$. Entonces por inducción, se sigue que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x^i e^{\lambda x}\}$ con $i = \{0, 1, 2 \cdots, k-1\}$, es una base de $Nu((D-\lambda I)^k)$.

e) Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comprobar que la ecuación

$$(D-\lambda I)^k[y] = g,$$

admite una solución particular de la forma $y_p(x) = f(x)e^{\lambda x}$, donde $f^k(x) = g(x)e^{-\lambda x}$.

Para probar que y_p es una solución particular del sistema $(D-\lambda I)^k[y] = g$, basta ver que $(D-\lambda I)^k[y_p] = g$.

Observar que como $f^k(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ entonces $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y por lo tanto podemos usar el item a) de la siguiente manera: sea $x \in \mathbb{R}$ entonces,

$$(D-\lambda I)^k[y_p(x)] = (D-\lambda I)^k[f(x)e^{\lambda x}] = f^k(x)e^{\lambda x} = g(x)e^{-\lambda x}e^{\lambda x} = g(x),$$

donde reemplazamos $f^k(x) = g(x)e^{-\lambda x}$.

Por lo tanto, probamos que $(D-\lambda I)^k[y_p] = g$ y entonces y_p es una solución particular del sistema $(D-\lambda I)^k[y] = g$.

En el próximo ejercicio, vamos a aplicar la Proposición 1 y lo que acabamos de demostrar en el **Ejercicio 29**.

Ejercicio 30: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

e) $y'' - 2y' + y = (3 + 5x)e^{2x}$,

f) $(D - I)^3[y] = (3 + 5x)e^{2x}$.

Dem. $e)$: Observar que si D es el operador derivación, entonces

$$L[y] := y'' - 2y' + y = (D^2 - 2D + I)[y].$$

Por lo tanto, si p es el polinomio característico de L tenemos que $p(x) = x^2 - 2x + 1$. Para aplicar la Proposición 1, observar que las raíces de p son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Entonces $p(x) = (x - 1)(x - 1)$ y por esa misma proposición, tenemos que

$$L = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) = (D - I)(D - I) = (D - I)^2.$$

Por lo tanto, vamos resolver el sistema

$$(D - I)^2[y] = g,$$

donde $g(x) = (3 + 5x)e^{2x}$. Como ya vimos, todas las soluciones del sistema a resolver y_s tienen la forma

$$y_s = y_h + y_p,$$

donde $y_h \in Nu((D - I)^2)$ e y_p es una solución particular.

Por el **Ejercicio 29 c)** tenemos que una base de $Nu((D - I)^2)$, es

$$B_{Nu((D-I)^2)} = \{e^x, xe^x\}$$

y, por el **Ejercicio 29 d)**, tenemos que una posible solución particula es $y_p = f(x)e^x$, donde $f^2(x) = f''(x) = g(x)e^{-x} = (3 + 5x)e^{2x}e^{-x} = (3 + 5x)e^x$. Entonces, integrando, nos queda que

$$f'(x) = \int (3 + 5x)e^x = 3e^x + 5e^x(x - 1) = (-2 + 5x)e^x,$$

observar que no agrego la constante de integración porque me basta con encontrar una solución particular. Integrando nuevamente, tenemos que

$$f(x) = \int (-2 + 5x)e^x = -2e^x + 5e^x(x - 1) = (-7 + 5x)e^x.$$

Por lo tanto

$$y_p = f(x)e^x = (-7 + 5x)e^x e^x = (-7 + 5x)e^{2x}$$

y las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y_s = \alpha e^x + \beta xe^x + (-7 + 5x)e^{2x},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$f)$: Vamos resolver el sistema

$$(D-I)^3[y] = g,$$

donde $g(x) = (3+5x)e^{2x}$. Como ya vimos, todas las soluciones del sistema a resolver y_s tienen la forma

$$y_s = y_h + y_p,$$

donde $y_h \in Nu((D-I)^3)$ e y_p es una solución particular.

Por el **Ejercicio 29 c)** tenemos que una base de $Nu((D-I)^3)$, es

$$B_{Nu((D-I)^3)} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$$

y, por el **Ejercicio 29 d)**, tenemos que una posible solución particula es $y_p = f(x)e^x$, donde

$$f^3(x) = f'''(x) = g(x)e^{-x} = (3+5x)e^{2x}e^{-x} = (3+5x)e^x.$$

Entonces, usando lo que hicimos en el item anterior, tenemos que $f'(x) = (-7+5x)e^x$. Integrando nuevamente, nos queda que $f(x) = (-12+5x)e^x$. Por lo tanto $y_p = f(x)e^x = (-12+5x)e^xe^x = (-12+5x)e^{2x}$ y las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y_s = \alpha e^x + \beta xe^x + \gamma x^2e^x + (-12+5x)e^{2x},$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. $\square$

Vamos a resolver el siguiente ejercicio item por item. Notar que hay un error en el item c) y notar que el item d) no es nada fácil.

Ejercicio 31: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean L y A dos transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) $L \circ A = A \circ L$, es decir L y A conmutan.

ii) $Nu(A \circ L)$ es de dimensión finita.

Verificar que:

a) $Nu(L) + Nu(A) \subseteq Nu(A \circ L)$.

Sea $x \in Nu(L) + Nu(A)$, entonces

$$x = x_1 + x_2,$$

con $x_1 \in Nu(L)$ y $x_2 \in Nu(A)$. Entonces

$$(A \circ L)(x) = A(L(x)) = A(L(x_1+x_2)) = A(L(x_1)+L(x_2)) = A(L(x_1)) + A(L(x_2))$$

$$= A(L(x_1)) + L(A(x_2)) = A(0_{\mathbb{V}}) + L(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{V}} + 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}},$$

donde usamos que $x_1 \in Nu(L)$, $x_2 \in Nu(A)$, que A y L conmutan y que $A, L \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Por lo tanto, $x \in Nu(A \circ L)$ y se sigue que $Nu(L) + Nu(A) \subseteq Nu(A \circ L)$.

b) Si $w \in Nu(A)$, entonces toda solución de la ecuación $L(v) = w$, pertence a $Nu(A \circ L)$.

Sea $v \in \mathbb{V}$, tal que $L(v) = w$, es decir v es una solución de la ecuación $L(v) = w$. Entonces

$$(A \circ L)(v) = A(L(v)) = A(w) = 0_{\mathbb{V}},$$

donde usamos que $w \in Nu(A)$. Entonces $v \in Nu(A \circ L)$.

c) **Hay un error en la guía, escribo el enunciado correcto:** Si $w \in Nu(A) \cap Im(L)$ y $\mathcal{S}$ es un subespacio tal que $Nu(L) \oplus \mathcal{S} = Nu(A \circ L)$, entonces existe un único $v \in \mathcal{S}$ tal que $L(v) = w$.

Observar que si sólo pedimos que $w \in Nu(A)$, no es cierto el item c). De hecho, tomemos $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, y $A = L = \mathbf{0}$ las transformaciones lineales nulas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$A(v) = L(v) = [0\ 0]^T,$$

para cada $v \in \mathbb{R}^2$. Entonces, claramente se cumple que $L \circ A = A \circ L$ y $Nu(A \circ L)$ es de dimensión finita. Tomemos $w = [1\ 2]^T$, entonces (claramente) $w \in Nu(A)$ pero no existe ningún v tal que $L(v) = w$, porque si existiera tal v tendríamos que

$$L(v) = [0\ 0]^T = w = [1\ 2]^T.$$

Lo cual es absurdo. Por lo tanto, debemos pedir que $w \in Nu(A) \cap Im(L)$.

Ahora sí, resolvamos el item c). Como $w \in Nu(A) \cap Im(L)$, entonces $w \in Im(L)$, entonces existe un vector $x \in \mathbb{V}$, tal que $L(x) = w$.

En el item b) vimos que, como $w \in Nu(A)$ y vale que $L(x) = w$, entonces $x \in Nu(A \circ L)$. Como $Nu(L) \oplus \mathcal{S} = Nu(A \circ L)$ y $x \in Nu(A \circ L)$, existen únicos $z \in Nu(L)$ y $v \in \mathcal{S}$, tales que $x = z + v$. Entonces

$$w = L(x) = L(z + v) = L(z) + L(v) = 0_{\mathbb{V}} + L(v) = L(v),$$

porque $z \in Nu(L)$.

Observar que v es único, porque si existe $v' \in \mathcal{S}$ tal que $L(v') = w$. Entonces, como

$$L(v) = w = L(v'),$$

tenemos que

$$0_{\mathbb{V}} = L(v) - L(v') = L(v - v'),$$

entonces $v - v' \in Nu(L)$ y como $\mathcal{S}$ es un subespacio y $v, v' \in \mathcal{S}$, también tenemos que $v - v' \in \mathcal{S}$. Es decir $v - v' \in Nu(L) \cap \mathcal{S} = \{0\}$. Entonces $v = v'$ y v es único.

d) Si además $Nu(L) \cap Nu(A) = \{0_{\mathbb{V}}\}$, entonces

- $Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$,
- para cada $w \in Nu(A) \cap Im(L)$ existe un único $v \in Nu(A)$ tal que $L(v) = w$.

Este item no es nada fácil. La guía nos recomienda leer la demostración del teorema de la dimensión de transfomaciones lineales definidas en dominios de dimensión finita como ayuda. Aunque no sé si sólo con las ideas de esa demostración nos basta para demostrar este ejercicio, vamos a tener que transpirar un poco.

Dicho esto, vamos a demostrar

$$Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L).$$

Usando el item a), ya sabemos que $Nu(A) \oplus Nu(L) \subseteq Nu(A \circ L)$. Sólo nos resta probar la otra inclusión. Para eso vamos a usar fuertemente que $Nu(A \circ L)$ es de dimensión finita.

Observemos que como siempre vale que $Nu(A) \subseteq Nu(A) \oplus Nu(L)$ (por qué?) y ya probamos que $Nu(A) \oplus Nu(L) \subseteq Nu(A \circ L)$, tenemos que $Nu(A) \subseteq Nu(A \circ L)$. Entonces

$$\dim(Nu(A)) \leq \dim(Nu(A \circ L)),$$

por lo tanto $Nu(A)$ también es de dimensión finita. Supongamos que $\dim(Nu(A)) = r$, donde r es 0 ó un número natural. Vamos a dividir la prueba en dos casos, si $r = 0$ ó $r > 0$.

Caso $r = 0$

Si $r = 0$, es decir A es monomorfismo, observar que $Nu(L) = Nu(A \circ L)$. Es fácil ver que $Nu(L) \subseteq Nu(A \circ L)$. Recíprocamente, si $x \in Nu(A \circ L)$ entonces $A(L(x)) = 0_{\mathbb{V}}$, entonces $L(x) \in Nu(A) = \{0_{\mathbb{V}}\}$, entonces $L(x) = 0_{\mathbb{V}}$ y $x \in Nu(L)$. Por lo tanto, $Nu(L) = Nu(A \circ L)$ y tenemos que

$$Nu(A \circ L) = Nu(L) = \{0_{\mathbb{V}}\} \oplus Nu(L) = Nu(A) \oplus Nu(L).$$

Entonces, para el caso $r = 0$, lo que queremos demostrar se cumple de manera trivial.

Caso $r > 0$

Supongamos que $r > 0$ (y finito). Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ una base de $Nu(A)$. La clave del ejercicio es, usando un poco de imaginación y la prueba del teorema de la dimensión, probar que

$$\{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_r)\}$$

también es una base de $Nu(A)$.

Veamos eso. Por un lado tenemos que, para $i = 1, 2, \cdots, r$

$$L(v_i) \in Nu(A),$$

pues $A(L(v_i)) = (A \circ L)(v_i) = (L \circ A)(v_i) = L(A(v_i)) = L(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{V}}$, donde usamos que, como $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ es una base de $Nu(A)$, entonces $v_1, v_2, \cdots, v_r \in Nu(A)$.

Veamos que el conjunto $\{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_r)\}$ es LI (por definición).

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \cdots + a_r L(v_r) = 0_{\mathbb{V}}.$$

Entonces, usando que L es TL, tenemos que

$$L(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r) = 0_{\mathbb{V}},$$

entonces $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r \in Nu(L)$. Además, como $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r$ es una CL de elementos de $Nu(A)$, tenemos que también $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r \in Nu(A)$. Por lo tanto

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r \in Nu(L) \cap Nu(A) = \{0\},$$

donde usamos la hipótesis. Entonces

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0_{\mathbb{V}},$$

y tenemos un CL de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_r$ igualada al elemento neutro de $\mathbb{V}$. Entonces como $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ es LI (porque es una base) se sigue que $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Entonces el conjunto $\{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_r)\}$ es LI.

Probamos que el conjunto $\{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_r)\}$ tiene r vectores LI que pertenecen a $Nu(A)$, eso implica (lo vimos en las primeras semanas) que $\{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_r)\}$ es una base de $Nu(A)$.

Ahora sí, estamos listos para probar la otra inclusión que nos quedaba, es decir, veamos que $Nu(A \circ L) \subseteq Nu(A) \oplus Nu(L)$.

Sea $x \in Nu(A \circ L)$ entonces $(A \circ L)(x) = A(L(x)) = 0_{\mathbb{V}}$. Entonces, $L(x) \in Nu(A)$. Como $\{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_r)\}$ es una base de $Nu(A)$, existen $b_1, b_2, \cdots, b_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$L(x) = b_1L(v_1) + b_2L(v_2) + \cdots + b_rL(v_r).$$

Entonces, como L es una TL, se sigue que

$$L(x) = L(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r).$$

Pasando de miembro y usando nuevamente que L es una TL, nos queda que

$$0_{\mathbb{V}} = L(x) - L(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r) = L(x - b_1v_1 - b_2v_2 - \cdots - b_rv_r),$$

entonces, $x - b_1v_1 - b_2v_2 - \cdots - b_rv_r \in Nu(L)$.

Observar que

$$x = [b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r] + [x - b_1v_1 - b_2v_2 - \cdots - b_rv_r].$$

Donde $x_1 := b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r \in Nu(A)$, pues x_1 es una CL de vectores de $Nu(A)$ y (acabamos de ver que) $x_2 := x - b_1v_1 - b_2v_2 - \cdots - b_rv_r \in Nu(L)$. Entonces tenemos que

$$x = x_1 + x_2,$$

con $x_1 \in Nu(A)$ y $x_2 \in Nu(L)$. Por lo tanto $x \in Nu(A) \oplus Nu(L)$, y tenemos que $Nu(A \circ L) \subseteq Nu(A) \oplus Nu(L)$. Como ya habíamos probado la otra inclusión, concluimos que $Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$, como queríamos ver.

Finalmente, como probamos que $Nu(A \circ L) = Nu(L) \oplus Nu(A)$, usando el item c) es inmediato ver que para cada $w \in Nu(A) \cap Im(L)$ existe un único $v \in Nu(A)$ tal que $L(v) = w$. La prueba es idéntica al item c) tomando $\mathcal{S} = Nu(A)$.

Nota: Usando la hipótesis $Nu(A) \cap Nu(L) = \{0\}$, observar que para demostrar el ítem d) sólo usamos que $\dim(Nu(A))$ es finita y bastó con eso. Es decir si $\dim(Nu(L))$ no es finita pero $\dim(Nu(A))$ sí es finita (por lo que $\dim(Nu(A \circ L))$ tampoco es finita) sigue valiendo que $Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$. Con argumentos muy parecidos a los que usamos para demostrar el ítem d), si pedimos que $\dim(Nu(L))$ es finita pero $\dim(Nu(A))$ es no finita también sigue valiendo que $Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$. El problema ocurre cuando $\dim(Nu(A))$ y $\dim(Nu(L))$ son ambas no finitas (y por ende también $\dim(Nu(A \circ L))$ es no finita), en ese caso no tiene porque ser cierto que $Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$.

Antes de pasar al próximo ejercicio, repasemos una propiedad que vimos en la prueba de la Proposición 1, si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y D es el operador diferencial, entonces

$$(D - \alpha I)^k (D - \beta I)^n = (D - \beta I)^n (D - \alpha I)^k, \tag{3}$$

para cualquier $k, n \in \mathbb{N}$. Es decir, para cualquier $k, n \in \mathbb{N}$, $(D - \alpha I)^k$ y $(D - \beta I)^n$ conmutan. La prueba de esta propiedad es muy simple y usa el princio de inducción, se sugiere hacerla de ejercicio.

Vamos a usar el **Ejercicio 31** para resolver el próximo ejercicio item por item.

Ejercicio 32: Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := (D - 2I)(D - 4I)(D + 3I)^2,$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3 e^{-3x}$.

a) Hallar una base $\mathcal{B}_L$ de $Nu(L)$.

Para resolver este ejercicio vamos a usar el **Ejercicio 29 b), c)** y el **Ejercicio 31**.

Llamemos $R := (D - 2I)$, $S := (D - 4I)$ y $T := (D + 3I)^2$. Entonces,

$$L = R \circ S \circ T.$$

Por el **Ejercicio 29 b), c)** tenemos que $\mathcal{B}_R = \{e^{2x}\}$, $\mathcal{B}_S = \{e^{4x}\}$ y $\mathcal{B}_T = \{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$ son bases de $Nu(R), Nu(S)$ y $Nu(T)$, respectivamente.

Para encontrar una base de $Nu(L)$, vamos a usar el **Ejercicio 31 c)** dos veces.

Primero, usando la propiedad (3), es fácil ver que $S \circ T = T \circ S$, por otra parte, es claro que

$$Nu(S) \cap Nu(T) = gen\{e^{4x}\} \cap gen\{e^{-3x}, xe^{-3x}\} = \{0\}.$$

Además, $Nu(S)$ y $Nu(T)$ son de dimensión finita. Entonces podemos usar el **Ejercicio 31 d)** y por lo tanto, tenemos que

$$Nu(S \circ T) = Nu(S) \oplus Nu(T) = gen\{e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}.$$

Segundo, usando nuevamente la propiedad (3), es fácil ver que $R \circ (S \circ T) = (S \circ T) \circ R$, por otra parte, es claro que

$$Nu(R) \cap Nu(S \circ T) = gen\{e^{2x}\} \cap gen\{e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\} = \{0\}.$$

Además, $Nu(R)$ y $Nu(S \circ T)$ son de dimensión finita. Entonces podemos usar nuevamente el **Ejercicio 31 d)** y por lo tanto, tenemos que

$$Nu(L) = Nu(R \circ S \circ T) = Nu(R) \oplus Nu(S \circ T) = gen\{e^{2x}\} \oplus gen\{e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\} =$$
$$= gen\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{B}_L = \{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}.$$

b) Comprobar que el operador $A = (D + 3I)^4$, es un *aniquilador* de p: $A[p] = 0$.

Llamemos $f(x) := 5x^3$, entonces claramente $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $p(x) = f(x)e^{-3x}$. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces,

$$A[p(x)] = (D+3I)^4[p(x)] = (D-(-3)I)^4[5x^3e^{-3x}] = (D-(-3)I)^4[f(x)e^{-3x}] = f^4(x)e^{-3x} = 0,$$

donde usamos el **Ejercicio 29 a)** y el hecho de que $f^4(x) = (5x^3)'''' = (15x^2)''' = (30x)'' = (30)' = 0$. Por lo tanto $A[p] = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ denota la transformación lineal nula.

c) Hallar una base $\mathcal{B}_{AL}$ de $Nu(A \circ L)$ que contenga a la base $\mathcal{B}_L$.

Observar que

$$A \circ L = (D + 3I)^4(D - 2I)(D - 4I)(D + 3I)^2 = (D - 2I)(D - 4I)(D + 3I)^6,$$

donde usamos que por la propiedad (3), todos los operadores involucrados conmutan.

Si llamamos $\tilde{T} := (D + 3I)^6$, con la misma notación que el item a), tenemos que

$$A \circ L = R \circ S \circ \tilde{T}$$

y, por el **Ejercicio 29 c)** tenemos que

$$Nu(\tilde{T}) = gen\{e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}.$$

Es claro que $Nu(S) \circ Nu(\tilde{T}) = \{0\}$ (verificarlo) y ambos subespacios son de dimensión finita.

Por lo tanto, de la misma manera que lo hicimos en el item a), aplicando el **Ejercicio 31 d)**, se sigue que

$$Nu(A \circ L) = Nu(R \circ S \circ \tilde{T}) = Nu(R) \oplus Nu(S \circ \tilde{T}) = Nu(R) \oplus [Nu(S) \oplus Nu(\tilde{T})] =$$
$$= gen\{e^{2x}\} \oplus gen\{e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\} =$$
$$= gen\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}.$$

La base $\mathcal{B}_{AL} = \{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}$ de $Nu(A \circ L)$, contiene a la base $\mathcal{B}_L$.

d) Comprobar que existe una solución particular y_p de la ecuación $L[y] = p$ perteneciente al subespacio $gen(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$.

Primero, observemos que

$$\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L = \{y \in \mathcal{B}_{AL} : y \notin \mathcal{B}_L\} = \{x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}.$$

Entonces,

$$gen(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L) = gen\{x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}.$$

Vamos a comprobar que existe una solución particular y_p perteneciente al subespacio $gen(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$. Para eso, sea $y \in gen(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$, entonces

$$y(x) = ax^2e^{-3x} + bx^3e^{-3x} + cx^4e^{-3x} + dx^5e^{-3x} = (ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5)e^{-3x},$$

para ciertos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Entonces, con la notación del item a) y usando el **Ejercicio 29a)** con $f(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5$, tenemos que $y(x) = f(x)e^{-3x}$ y

$$T[y(x)] = (D + 3I)^2[y(x)] = (D - (-3I))^2[f(x)e^{-3x}] = f''(x)e^{-3x} =$$
$$= (ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5)''e^{-3x} = (2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4)'e^{-3x} =$$
$$= (2a + 6bx + 12cx^2 + 20dx^3)e^{-3x}.$$

Ahora, llamemos $g(x) := 2a + 6bx + 12cx^2 + 20dx^3$, entonces $T[y(x)] = g(x)e^{-3x}$. Entonces

$$(S \circ T)[y(x)] = S(T[y(x)]) = S[g(x)e^{-3x}] =$$
$$= \frac{d[g(x)e^{-3x}]}{dx} - 4g(x)e^{-3x} = g'(x)e^{-3x} - 3g(x)e^{-3x} - 4g(x)e^{-3x} =$$
$$= (-7g(x) + g'(x))e^{-3x} = -7g(x)e^{-3x} + (6b + 24cx + 60dx^2)e^{-3x} =$$
$$= [-14a + 6b + (-42b + 24c)x + (-84c + 60d)x^2 - 140dx^3]e^{-3x}.$$

Finalmente, llamemos $h(x) := [-14a+6b+(-42b+24c)x+(-84c+60d)x^2-140dx^3]$, entonces $(S \circ T)[y(x)] = h(x)e^{-3x}$. Entonces

$$L[y(x)] = (R \circ S \circ T)[y(x)] = R[h(x)e^{-3x}] =$$
$$= \frac{d(h(x)e^{-3x})}{dx} - 2h(x)e^{-3x} = h'(x)e^{-3x} - 3h(x)e^{-3x} - 2h(x)e^{-3x} =$$
$$= [-5h(x) + h'(x)]e^{-3x} =$$
$$= [70a - 72b + 24c + (210b - 288c + 120d)x + (420c - 720d)x^2 + 700x^3]e^{-3x}.$$

Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$L[y(x)] = [70a - 72b + 24c + (210b - 288c + 120d)x + (420c - 720d)x^2 + 700dx^3]e^{-3x} = 5x^3e^{-3x},$$

simplificando el término e^{-3x} (que siempre es positivo), se sigue que

$$70a - 72b + 24c + (210b - 288c + 120d)x + (420c - 720d)x^2 + 700dx^3 = 5x^3.$$

Entonces

$$700d = 5,\ 420c - 720d = 0,\ 210b - 288c + 120d = 0,\ 70a - 72b + 24c = 0.$$

Entonces, $d = \frac{5}{700} = \frac{1}{140}$; $c = \frac{72}{42}d = \frac{72}{42\times 140} = \frac{3}{245}$; $b = \frac{288c-120d}{210} = \frac{107}{1225}$; $a = \frac{72b-24c}{70} = \frac{2872}{42875}$. Por lo tanto

$$y_p = (\frac{2872}{42875}x^2 + \frac{107}{1225}x^3 + \frac{3}{245}x^4 + \frac{1}{140}x^5)e^{-3x},$$

es una solución particular perteneciente al subespacio $gen(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$. Se recomienda revisar bien las cuentas porque es altamente probable que haya hecho algo mal.

e) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = p$.

La solución general y_s tiene la forma $y_s = y_h + y_p$, donde $y_h \in Nu(L)$ e y_p es una solución particular. Usando los item a) y d) tenemos que,

$$y_s = \alpha e^{2x} + \beta e^{4x} + \gamma e^{-3x} + \delta x e^{-3x} + (\frac{2872}{42875}x^2 + \frac{107}{1225}x^3 + \frac{3}{245}x^4 + \frac{1}{140}x^5)e^{-3x},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

Observaciones y repaso de algunas propiedades

Antes de resolver el siguiente ejercicio, algunas observaciones:

- Con lo que vimos en el **Ejercicio 32**, es fácil ver que si tenemos el operador

$$L := (D - \lambda_1)^{k_1}(D - \lambda_2)^{k_2} \cdots (D - \lambda_n)^{k_n}$$

donde $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ todas distintos entre sí, entonces:

$$\begin{aligned} Nu(L) &= \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : L[y] = 0\} \\ &= \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : (D - \lambda_1)^{k_1}[y] = 0\} \oplus \cdots \oplus \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : (D - \lambda_n)^{k_n}[y] = 0\} \\ &= Nu((D - \lambda_1)^{k_1}) \oplus \cdots \oplus Nu((D - \lambda_n)^{k_n}). \end{aligned} \tag{4}$$

Es decir, la solución del sistema homogéneo $L[y] = 0$ se puede obtener factorizando el operador L como $L = (D - \lambda_1)^{k_1}(D - \lambda_2)^{k_2} \cdots (D - \lambda_n)^{k_n}$ donde $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ todas distintas entre sí (es decir las raíces del polinomio característico asociado a L se cuentan una vez). Luego, la solución del sistema homogéneo $L[y] = 0$, se obtiene sumando las soluciones de cada sistema homogéneo $(D - \lambda_i)^{k_i}[y] = 0$.

- Recordemos que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$) entonces
$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)). \tag{5}$$

- Recordemos que en el **Ejercicio 1.5** probamos que, si estamos trabajando en un cuerpo complejo, dados $a, b \in \mathbb{R}$, se sigue que
$$gen\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx)\} = gen\{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\}. \tag{6}$$

Vamos a resolver un ejemplo para aplicar estas propiedades.
Ejemplo: Obtener una base soluciones del sistema
$$L[y] = y^{(6)} - 9y^{(5)} + 25y^{(4)} - 17y^{(3)} = 0.$$

Dem. El polinomio característico asociado a L es
$$p(x) = x^6 - 9x^5 + 25x^4 - 17x^3.$$
Las raíces de p son $\lambda_1 = 0$ (triple), $\lambda_2 = 4 + i$, $\lambda_3 = 4 - i$, $\lambda_4 = 1$. Entonces,
$$p(x) = x^3(x - (4 + i))(x - (4 - i))(x + 1).$$
Por la Proposición 1, L se factoriza como
$$L = D^3(D - (4 + i)I)(D - (4 - i)I)(D - I).$$
Por lo tanto, usando el **Ejercicio 29** tenemos que:
$$Nu(D^3) = Nu(D - 0I)^3 = gen\{1, x, x^2\},\ Nu((D - I)) = gen\{e^x\},$$
$$Nu((D - (4 + i)I)) = gen\{e^{(4+i)x}\},\ Nu((D - (4 - i)I)) = gen\{e^{(4-i)x}\}.$$
Por la propiedad (6), tenemos que
$$gen\{e^{(4+i)x}, e^{(4-i)x}\} = gen\{e^{4x}\cos(x), e^{4x}\sin(x))\}.$$
Entonces, por la propiedad (4), se sigue que
$$Nu(L) = gen\{1, x, x^2\} \oplus gen\{e^x\} \oplus gen\{e^{4x}\cos(x), e^{4x}\sin(x)\} =$$
$$= gen\{1, x, x^2, e^x, e^{4x}\cos(x), e^{4x}\sin(x)\}.$$
Por lo tanto, una base de soluciones del sistema es
$$\mathcal{B}_L = \{1, x, x^2, e^x, e^{4x}\cos(x), e^{4x}\sin(x)\}.$$
□

Ahora sí, con todas las propiedades que vimos vamos a poder resolver los ejercicios que restan.
Ejercicio 35: Construir una ecuación diferencial
$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0,$$
con $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, del menor orden posible que tenga como soluciones:

e) $y_1(t) = t,\ y_2(t) = \cos(3t),\ y_3(t) = e^{-t}$.

Dem. $e)$: Para resolver este item vamos a usar el **Ejercicio 29** y las propiedades (4), (5) y (6).

Observar que, si $y_1(t) = t = te^{0t}$ es una solución de $L[y] = 0$, es porque $\lambda_1 = 0$ es una raíz del polinomio característico asociado a L. Además, como t multiplica a e^{0t}, esa raíz es doble.

Además, si $y_2(t) = \cos(3t) = e^{0t}\cos(3t)$, es una solución de $L[y] = 0$, es porque $\lambda_1 = 3i$ es una raíz del polinomio característico asociado a L. Como $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, el polinomio característico asociado a L tendrá coeficientes reales, entonces si $\lambda_3 = 3i$ es una raíz, su conjugado $\lambda_4 = -3i$ también es una raíz.

Finalmente, si $y_3(t) = e^{-t}$ es una solución de $L[y] = 0$, es porque $\lambda_5 = -1$ es una raíz del polinomio característico asociado a L.

De esta manera, el polinomio p de menor grado cuyas raíces son $\{0 \text{ (doble) }, 3i, -3i, -1\}$ es

$$p(x) = x^2(x-3i)(x+3i)(x+1).$$

Entonces, por la Proposición 1, podemos factorizar al operador L como

$$L = (D-(0)I)^2(D-3iI)(D+3iI)(D+I) = D^5 + D^4 + 9D^3 + 9D^2.$$

Entonces y_1, y_2, y_3 son soluciones del sistema

$$L[y] = (D^5 + D^4 + 9D^3 + 9D^2)[y] = y^{(5)} + y^{(4)} + 9y^{(3)} + 9y'' = 0.$$

Es más, una base de soluciones de ese sistema es

$$\mathcal{B}_L = \{1, t, \cos(3t), \sin(3t), e^{-t}\}.$$

□